2020

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

Day - 2

বহু বিকল্পক নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ১×১০

(ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর $S^2 = 6t^2 + 4t + 3$ গতির নিয়মে চলে, যেখানে S হল সরণ এবং t হল সময়। তবে কণাটির ত্বরণ নিম্নলিখিত কোনটির সঙ্গে সরলভেদে থাকবে?

(অ) $\frac{1}{S^3}$ (আ) $\frac{1}{S^2}$ (ই) S^2 (ঈ) $\frac{1}{S}$

(খ) যদি একটি কণা $r = a\cos\theta$ বক্রের উপর কেন্দ্রীয় বল দ্বারা চালিত হয়, তবে কণাটি নিম্নলিখিত কোনটির সঙ্গে সরলভেদে থাকবে?

(অ) $\frac{1}{r^5}$ (আ) $\frac{1}{r^3}$ (ই) r^3 (ঈ) r^5

(গ) C.G.S. পদ্ধতিতে কার্যের পরম একক হল

(অ) ফুট-পাউন্ডাল (আ) আর্গ (ই) অশ্বশক্তি (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঘ) 2 কিলোগ্রাম ভরের একটি বস্তুকে 5 মিটার উচ্চতায় তুলতে কার্যের পরিমাণ হল

(অ) 98 জুল (আ) 95 জুল (ই) 97 জুল (ঈ) 96 জুল।

(ঙ) কেন্দ্রীয় বলের অধীনে চলমান কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে ধ্রুবক h-এর মান হল

(অ) $h = r\frac{d\theta}{dt}$ (আ) $h = \frac{d\theta}{dt}$ (ই) $h = \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dt}$ (ঈ) $h = r^2\frac{d\theta}{dt}$।

(চ) সরল দোলগতিতে চলমান কোনো বস্তুকণার সমীকরণ $x = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ হলে, দোলনের পর্যায়কাল হবে

(অ) 9 একক (আ) 6 একক (ই) 3 একক (ঈ) 12 একক।

(ছ) কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল ঘাতের (Impulse) পরিমাপ হল

(অ) ঘাত = গতিশক্তির পরিবর্তন (আ) ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

(ই) ঘাত = ক্রিয়াশীল বল দ্বারা কার্যের পরিমাণ (ঈ) কোনোটিই নয়।

(জ) $\frac{1}{4}$ পাউন্ড ভরবিশিষ্ট একটি ক্রিকেট বল 15 ফুট/সেকেন্ড গতিতে ধাবমান। বলটি একটি ব্যাটের আঘাতে 40 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগে বিপরীত অভিমুখে ধাবিত হলে ব্যাটের অভিঘাত বল হল

(অ) $13\frac{3}{4}$ সেকেন্ড পাউন্ডাল (আ) 13 সেকেন্ড পাউন্ডাল

(ই) $\frac{3}{4}$ সেকেন্ড পাউন্ডাল (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঝ) একটি কণা $S=\frac{1}{2}vt$ গতিসূত্র মেনে সরলরেখায় চলে, যেখানে v কণাটির গতিবেগ। তাহলে ত্বরণ হল

(অ) বেগের সঙ্গে সমানুপাতিক (আ) বেগের বর্গের সঙ্গে সমানুপাতিক

(ই) বেগের অন্যোন্যকের সঙ্গে সমানুপাতিক (ঈ) ধ্রুবক।

(ঞ) একটি বস্তুকণার চলমান পথের বক্রের সমীকরণ $r=ae^{\theta}$, যার কৌণিক বেগ ধ্রুবক। তাহলে অরীয় ত্বরণের মান

(অ) r-এর সঙ্গে সমানুপাতিক (আ) θ-এর সঙ্গে সমানুপাতিক

(ই) শূন্য নয় এমন ধ্রুবক (ঈ) শূন্য।

২। ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×১

(ক) সমতলীয় বক্ররেখায় চলমান একটি কণার ত্বরণের স্পর্শক উপাংশ নির্ণয় করো।

(খ) M ভরবিশিষ্ট কামান থেকে m ভরবিশিষ্ট গোলা নিক্ষেপের জন্য বিস্ফোরণে E পরিমাণ গতিশক্তি সৃষ্টি হয়। দেখাও যে কামানের গোলার প্রারম্ভিক গতিবেগ ছিল $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$।

যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ১০×৫

৩। (ক) ধ্রুবক ঘাতসম্পন্ন একটি ইঞ্জিন, যা প্রতি সেকেন্ডে H একক কার্য করে, তা একটি ট্রেনকে টেনে নিয়ে যাচ্ছে। যদি সমগ্র ট্রেনের ভর M হয় এবং বাধা R-কে ধ্রুবক বলে ধরা হয়, তবে দেখাও যে স্থিতাবস্থা থেকে V গতিবেগ উৎপন্ন করতে $\left(\frac{MH}{R^2}\log\frac{H}{H-RV}-\frac{MV}{R}\right)$ সেকেন্ড সময় লাগবে।

(খ) R পাউন্ডাল বাধার বিরুদ্ধে V ফুট/সেকেন্ড গতিতে চলন্ত একটি ট্রেনের ইঞ্জিনের অশ্বশক্তি কত? ৮+২

৪। (ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর $x = a\cos(nt + b)$ গতির নিয়মে চলে। দেখাও যে কণাটির ত্বরণ কেন্দ্রাভিমুখী এবং দূরত্বের সঙ্গে সরলভেদে আছে।

(খ) সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণার কেন্দ্রবিন্দু O-এর সাপেক্ষে পর্যায়কাল (period) T এবং এটি OP অভিমুখে P বিন্দুকে V গতিবেগে অতিক্রম করে। যদি কণাটি P বিন্দুতে ফিরে আসতে t সময় নেয় তাহলে দেখাও যে $t = \frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{VT}{2\pi x}\right)$ এবং $OP = \frac{VT}{2\pi}\cot\frac{\pi t}{T}$, যেখানে $OP = x$। ২+(৪+৪)

৫। (ক) নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃত করো।

(খ) বলকেন্দ্র O থেকে x দূরত্বে $\mu x^{-5/3}$ আকর্ষক বলের অধীনে একটি কণা সরলরেখায় গতিশীল। যদি O বিন্দু থেকে a দূরত্বে থেকে কণাটি স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে, তবে দেখাও যে কণাটি $\frac{2a^{4/3}}{\sqrt{3\mu}}$ সময়ে O বিন্দুতে পৌঁছাবে। ২+৮

৬। (ক) একটি বস্তুকণা $x^2 = 8y$ অধিবৃত্তাকার পথে এরূপ বলের অধীনে গতিশীল হয়, যা সর্বদাই y অক্ষের সঙ্গে লম্ব। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো এবং কণাটির গতিপথের যে-কোনো একটি বিন্দুতে তার গতিবেগ নির্ণয় করো।

(খ) রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্রটি বিবৃত করো। ৮+২

৭। (ক) m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার উপর $m\mu(r^{-3} + 8c^2r^{-5})$ পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। কণাটি যদি c দূরত্বে apse থেকে $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$ বেগে প্রক্ষিপ্ত হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হবে $r = c\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$।

(খ) কেপলারের গ্রহগতির সূত্রগুলি বিবৃত করো। ৮+২

৮। (ক) একটি বস্তুকণা একটি মাধ্যমে ছোঁড়া হল। মাধ্যমের বাধা কণার গতিবেগের ঘনের সঙ্গে সমানুপাতিক এবং অন্য কোনো বল কণার উপর কাজ করছে না। t সময়ে বস্তুকণাটি যদি d দূরত্ব যায় এবং গতিবেগ যদি v_1 থেকে হ্রাস পেয়ে v_2 হয়, তবে দেখাও যে $\frac{d}{t} = \frac{2v_1v_2}{(v_1 + v_2)}$।

(খ) শক্তির সংরক্ষণ সূত্রটি বিবৃত করো। ৮+২

৯। (ক) একটি কণার প্রতি একক ভরের উপর F আকর্ষক বলের অধীনে কেন্দ্রীয় কক্ষপথে বিচরণশীল। ওই কণার কক্ষপথের অবকল সমীকরণ নিম্নোক্ত আকারে প্রকাশ করো ঃ

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$$ । (প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত)

(খ) Apse এবং Apsidal distance-এর সংজ্ঞা দাও। ৮+২

Please Turn Over

১০। m ভরবিশিষ্ট কোনো একটি কণা $\left\{\mu \div (\text{দূরত্ব})^2\right\}$ এই কেন্দ্রীয় ত্বরণ দ্বারা গতিশীল। কণাটিকে R দূরত্ব থেকে V গতিবেগে উৎক্ষেপণ করা হয়েছে। দেখাও যে, কণাটির গতিপথ একটি সমপরাবৃত্ত (Rectangular hyperbola) হবে যদি প্রক্ষেপ কোণটি হয় $\sin^{-1}\left[\mu \div \left\{VR\sqrt{\left(V^2 - \frac{2\mu}{R}\right)}\right\}\right]$। ১০

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Multiple Choice Questions

1. Answer ***all*** the questions : 1×10

(a) A particle moves along a straight line according to the law $S^2 = 6t^2 + 4t + 3$, where S is the displacement and t is the time. Then its acceleration varies as

(i) $\frac{1}{S^3}$ (ii) $\frac{1}{S^2}$ (iii) S^2 (iv) $\frac{1}{S}$.

(b) If a particle describes the curve $r = a\cos\theta$ under a central force to the pole, then the force varies as

(i) $\frac{1}{r^5}$ (ii) $\frac{1}{r^3}$ (iii) r^3 (iv) r^5.

(c) In C.G.S. system the absolute unit of work is

(i) Foot-poundal (ii) Erg (iii) Horsepower (iv) None of these.

(d) The work done in raising a mass of 2kg to a height of 5 meter is

(i) 98 joules (ii) 95 joules (iii) 97 joules (iv) 96 joules.

(e) For a central orbit, the expression for the constant h is

(i) $h = r\frac{d\theta}{dt}$ (ii) $h = \frac{d\theta}{dt}$ (iii) $h = \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dt}$ (iv) $h = r^2\frac{d\theta}{dt}$.

(f) For a Simple Harmonic motion $x = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, the time period is

(i) 9 unit (ii) 6 unit (iii) 3 unit (iv) 12 unit.

(g) The impulse acting on a body is given by

(i) Impulse = Change in Kinetic energy (ii) Impulse = Change in Momentum

(iii) Impulse = Workdone by acting force (iv) None of these.

(h) A cricket ball weighing $\frac{1}{4}lb$ is moving with a velocity of 15ft/second and is struck by a bat which causes it to travel in the opposite direction with a velocity of 40ft/second. Then the impulsive force of the bat is

(i) $13\frac{3}{4}$ sec-pondals (ii) 13 sec-poundals

(iii) $\frac{3}{4}$ sec-pondals (iv) None of these.

(i) The law of motion of a particle moving in a straight line is $S = \frac{1}{2}vt$. Then the acceleration is

(i) proportional to velocity (ii) proportional to square of velocity

(iii) proportional to inverse of velocity (iv) constant.

[v is the velocity of the particle]

(j) A particle describes a curve $r = ae^{\theta}$ with constant angular velocity. Then the radial acceleration is

(i) proportional to r (ii) proportional to θ

(iii) non-zero constant (iv) zero.

2. Answer ***any one*** question : 5×1

(a) Find the expression for tangential component of velocity of a particle moving in a plane.

(b) A Cannon ball of mass m is projected from a Cannon of mass M by an explosion which generates kinetic energy E. Prove that the initial velocity of the Cannon ball is $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)\,m}}$.

Answer ***any five*** questions. 10×5

3. (a) An engine works at a constant power H units of work per second. It pulls a train of total mass M against a constant resistant R. Show that the train acquires velocity V in time $\left(\frac{MH}{R^2}\log\frac{H}{H-RV} - \frac{MV}{R}\right)$ seconds.

(b) What is the Horsepower of the engine which keeps a train moving with velocity V ft/second against a resistance of R poundals? 8+2

4. (a) A particle moves along a straight live under the law of motion given by $x = a\cos(nt + b)$. Show that the acceleration is directed to the origin and varies as the distance.

(b) A particle is performing a simple harmonic motion of period T about a centre O and it passes through a point P with a velocity V in the direction OP. If the particle returns to P in time t, then show that

$t = \frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{VT}{2\pi x}\right)$ and $OP = \frac{VT}{2\pi}\cot\frac{\pi t}{T}$, where $OP = x$. 2+(4+4)

Please Turn Over

5. (a) State Second law of Newton.

(b) A particle moves in a straight line under the action of an attractive force $\mu x^{-5/3}$, when at a distance x from the centre of force O. If it starts from rest at a distance 'a' from O, then show that it will arrive at O in time $\frac{2a^{4/3}}{\sqrt{3\mu}}$. 2+8

6. (a) A particle describes a parabola $x^2 = 8y$ under a force which is always perpendicular to y-axis. Find the law of force and the velocity of the particle at any point on its orbit.

(b) State the principle of conservation of linear momentum. 8+2

7. (a) A particle of mass m moves under a central attractive force $m\mu(r^{-3} + 8c^2r^{-5})$ and is projected from an apse at a distance c with velocity $\frac{3\sqrt{\mu}}{c}$. Prove that the equation of the orbit is $r = c\cos\left(\frac{2}{3}\theta\right)$.

(b) Write Kepler's laws on planetary motion. 8+2

8. (a) A particle is projected in a medium whose resistance is proportional to the cube of the velocity and no other force acts on the particle. While the velocity diminishes from v_1 to v_2, the particle traverses a distance d in time t. Show that $\frac{d}{t} = \frac{2v_1v_2}{(v_1 + v_2)}$.

(b) State the principle of conservation of energy. 8+2

9. (a) Establish the differential equation of the path for the motion of a particle moving in a central orbit under an attractive force F per unit mass, in the form $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$ (symbols have their usual meanings).

(b) Define apse and apsidal distances. 8+2

10. A particle of mass m is moving with central acceleration $\left\{\mu \div (\text{distance})^2\right\}$. It is projected with a velocity V at a distance R. Show that its path is a rectangular hyperbola if the angle of projection is $\sin^{-1}\left[\mu \div \left\{VR\sqrt{\left(V^2 - \frac{2\mu}{R}\right)}\right\}\right]$. 10