2018

MATHEMATICS – GENERAL

Third Paper

Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

Symbols have their usual meanings.

Module-V is compulsory and answer ***any one*** Group from **Module-VI**

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

Module - V

Marks : 50

বিভাগ - ক

মান : ২০

১নং প্রশ্ন ও যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। ***যে-কোনো দুইটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×২

(ক) $\frac{2}{3}$ কে আসন্ন চারটি সার্থক অঙ্ক (Significant figure) আকারে প্রকাশ করো এবং উহার শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করো।

(খ) x-এর কিছু মানের জন্য $f(x)$ অপেক্ষকটির মানগুলি নিম্নলিখিত সারণীতে দেওয়া হল।

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	5	22	57

পার্থক্য সারণী (difference table) গঠন করো।

(গ) শ্রেণি দৈর্ঘ্য $h = 1$ ধরে, প্রমাণ করো $\frac{\Delta^2 x^3}{Ex} = 6$

(ঘ) $x - y$-এর মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আপেক্ষিক ত্রুটি নির্ণয় করো। যখন $x = 12{\cdot}05$ এবং $y = 9{\cdot}02$, পরম ত্রুটি (absolute error) যখন $\delta x = 0{\cdot}005$ এবং $\delta y = 0{\cdot}001$।

২। (ক) উপযুক্ত অন্তঃমান সূত্র (Interpolation formula) ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সারণী থেকে $f(0{\cdot}16)$-এর তিন দশমিক অবধি আসন্নমান নির্ণয় করো। ৫

x	0·1	0·2	0·3	0·4
$f(x)$	1·005	1·020	1·045	1·081

(খ) প্রমাণ করো $\Delta^3 = E^3 - 3E^2 + 3E - I$, যেখানে Δ, E, I প্রচলিত অর্থবহ। ৩

৩। (ক) [0, 1] অন্তরালটিকে ছটি সমান উপ অন্তরালে Simpson's $\frac{1}{3}$ rule-এর সাহায্যে $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}$-এর চার দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করো। ৬

(খ) পাঁচটি কোটি (ordinate) এর জন্য $\int_a^b f(x)dx$-এর মান নির্ণয়ে Trapezoidal সূত্রটি বিবৃত করো। ২

৪। (ক) Lagrange-এর অন্তঃমান সূত্রটি বিবৃত করো। ৩

(খ) $f(x)$ বহুপদ রাশিমালাটি নির্ণয় করো, যেটি নিম্নলিখিত মানগুলি গ্রহণ করে। ৫

x	–2	1	2	4
$f(x)$	24	–9	–16	–24

৫। (ক) সমদ্বিমণ্ডল (Bisection) সূত্র প্রয়োগ করে $x^3 - x - 1 = 0$ সমীকরণের দুই সার্থক অঙ্ক বিশিষ্ট একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করো। ৬

(খ) $f(x) = 0$ সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ নির্ণয়ের জন্যে Newton-Raphson সূত্রটি বিবৃত করো। ২

বিভাগ - খ

মান : ৩০

৬নং প্রশ্ন ও আরো যে-কোনো দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৬। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও। ২×৩

(ক) নিম্নলিখিত অসমীকরণগুলির জন্য কার্যকর অঞ্চলটির ছবি অঙ্কন করো।

$$2x + 3y \le 6$$

$$x - y \le 1, \quad x, y \ge 0$$

(খ) E^3 তে (1, 3, 1), (2, K, 0) এবং (0, 4, 1) ভেক্টরগুলি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হলে, K-এর মান নির্ণয় করো।

(গ) নিম্নলিখিত সমীকরণটি একটি পরাসমতল $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 7$, ঐ পরাসমতলের দ্বারা নির্ণিত কোন কোন অর্ধদেশে (1, 2, 3, 4) এবং (1, 2, 2, –4) ঐ বিন্দুদ্বয় অবস্থিত তাহা নির্ণয় করো।

(ঘ) দেখাও যে $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 0$ একটি মৌলিক সমাধান নিম্নলিখিত সহসমীকরণগুলির

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 11$$
$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 14$$

(ঙ) North-West Corner পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত পরিবহণ সমস্যার একটি IBFS বের করো ঃ

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	6	9	5	16
O_2	2	6	4	1	12
O_3	5	7	2	9	15
b_j	12	14	9	8	

৭। (ক) একটি কারখানায় দুইটি বস্তু A এবং B উৎপাদন হয়, তিনটি যন্ত্র M_1, M_2, M_3 এর সাহায্যে। এক একক A প্রস্তুত করতে তিনটি যন্ত্র সময় নেয় যথাক্রমে 2, 1 ও 1 ঘণ্টা এবং এক একক B প্রস্তুত করতে সময় নেয় যথাক্রমে 3, 1 ও 3 ঘণ্টা। M_1, M_2 ও M_3 যন্ত্র তিনটি মাসে যথাক্রমে 300, 300 ও 240 ঘণ্টা চলতে পারে। যদি 1 একক A এবং B বিক্রি করে লাভ হয় যথাক্রমে 2 টাকা ও 3 টাকা, তবে উপরোক্ত সমস্যাটির চরম লাভের জন্য একটি L.P.P এর আকৃতি দাও। ৭

(খ) উত্তল সেটের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সকল কার্যকর সমাধানগুলি একটি উত্তল সেট গঠন করে। ১+৪

৮। (ক) লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধান করো ঃ ৬

চরম $Z = 5x_1 - 7x_2$

যেখানে $3x_1 - 8x_2 \le 12$

$x_1 + x_2 \le 2$

$2x_1 \le 3$

এবং $x_1, x_2 \ge 0$

(খ) নীচের পরিবহণ সমস্যাটির সমাধান করো ঃ ৬

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	0	2	1	5
O_2	2	1	5	10
O_3	2	4	3	5
$b_j \rightarrow$	5	5	10	

৯। (ক) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সকল মৌলিক কার্যকর সমাধানগুলি নির্ণয় করো ঃ ৭

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8$$
$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

(খ) নিম্নলিখিত L.P.P-এর ক্ষেত্রে "দ্বৈত সমস্যার দ্বৈত সমস্যা হল মুখ্য সমস্যা" বিবৃতিটি যাচাই করো ঃ ৫

চরম $Z = 3x_1 + 2x_2$

যেখানে $2x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

১০। (ক) Simplex পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম সমস্যাটির সমাধান করো ঃ ৬

চরম $Z = 5x_1 + 3x_2$

যেখানে $3x_1 + 5x_2 \leq 5$

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

(খ) নিম্নলিখিত ব্যয় ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে সর্বোত্তম আরোপ নির্ণয় করো সর্বনিম্ন খরচের জন্য ঃ ৬

	1	2	3	4
A	10	12	19	11
B	5	10	7	8
C	12	14	13	11
D	8	15	11	9

Module - VI

বিভাগ - ক

(Analytical Dynamics)

মান : ৫০

১১নং প্রশ্ন ও *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৫

(ক) রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্রটি বিবৃত করো।

(খ) স্থিরাবস্থা থেকে সরলরেখায় গতিশীল একটি বস্তুকণার ত্বরণের সম্পর্কটি হল $f = 15 - 0{\cdot}4\, t^2$। তার t-সময় পরে গতিবেগ এবং দূরত্ব নির্ণয় করো।

(গ) একটি কণা $r = ae^{\theta}$ রেখায় এরূপে গতিশীল যে এর ত্বরণের অরীয় উপাংশ শূন্য। দেখাও যে, এর কৌণিক গতিবেগ ধ্রুবক।

(ঘ) 'বলের ঘাত' ও 'ঘাত বল' কাকে বলে লেখো।

(ঙ) যদি সময় (t) গতিবেগের (v) অপেক্ষক হলে প্রমাণ করো যে ত্বরণের (f) হ্রাসের হার হয় $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$।

(চ) একটি বস্তুকণার বক্রের সমীকরণ $r = ae^{\theta}$ (যার কৌণিক বেগ ধ্রুবক)। দেখাও যে এর অরীয় ত্বরণ ধ্রুবক।

(ছ) নাভি অভিমুখী কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে কোনো গতিশীল কণার কেন্দ্রীয় কক্ষপথটি একটি অধিবৃত্ত $p^2 = ar$ সেই বলের নিয়মটি বর্ণনা করো।

(জ) একটি নির্দিষ্ট মূলবিন্দু হতে অরীয় ভেক্টর বরাবর এবং এর লম্ব বরাবর কণাটির গতিবেগ যথাক্রমে λr এবং $\mu\theta$ হলে, কণাটির গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ঝ) মূলবিন্দুর সাপেক্ষে একটি বস্তুকণার কৌণিক বেগ ধ্রুবক হলে প্রমাণ করো যে, লম্ব অরীয় দিশায় কণাটির ত্বরণের উপাংশ অরীয় দিশায় কণাটির বেগের সমানুপাতি।

১২। একটি কণা প্রতি একক ভরে F কেন্দ্রীয় আকর্ষক বলের প্রভাবে সমতলে চলে। প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত প্রতীক ধরে দেখাও যে, গতিপথের অবকলজ সমীকরণ হল $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F$ ৮

১৩। সমতলীয় বক্ররেখায় চলমান একটি কণার ত্বরণের স্পর্শক এবং অভিলম্ব উপাংশ নির্ণয় করো। ৮

১৪। m ভর বিশিষ্ট একটি কণা mn^2x আকর্ষণ বলের অধীনে একটি সরলরেখায় গতিশীল এবং সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে অভিমুখী হয় যেখানে x হল ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্ব। যদি কণাটি ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে প্রারম্ভিক a দূরত্ব থেকে V গতিবেগে বলের কেন্দ্রের অভিমুখে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে দেখাও যে, কণাটি বলের কেন্দ্রে $\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{na}{V}\right)$ সময় পরে পৌঁছাবে। ৮

১৫। কোনো কণা $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ পথে এমন একটি বলের অধীনে গতিশীল যা সর্বদাই মেরু অভিমুখী হয়। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো। ৮

১৬। একটি M ভর বিশিষ্ট কামান থেকে m ভর বিশিষ্ট গোলা নিক্ষেপের জন্য বিস্ফোরণে E পরিমাণ গতিশক্তি সৃষ্টি হয়। দেখাও যে, কামানের গোলার প্রারম্ভিক গতিবেগ ছিল $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$ ৮

১৭। একটি বস্তুকণা $y = c\cosh\frac{x}{c}$ ক্যাটিনারী বক্রপথে গতিশীল হয় এরূপ বলের অধীনে, যা সর্বদাই y-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে সমান্তরাল। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো। ৮

১৮। প্রমাণ করো যে, একটি সমতলে গতিশীল m_1 ও m_2 ভর বিশিষ্ট দুটি কণার গতিশক্তি হয় $\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2$ যেখানে u হল কণাদ্বয়ের ভরকেন্দ্রের গতিবেগ ও v হল ওদের আপেক্ষিক গতিবেগ। ৮

১৯। কোনো কণা $\mu \times (\text{দূরত্ব})^{-2}$ এই কেন্দ্রীয় ত্বরণ দ্বারা গতিশীল। কণাটিকে R দূরত্ব থেকে V গতিবেগে উৎক্ষেপ করা হয়েছে। কণাটির গতিপথ সমপরাবৃত্ত হলে, দেখাও যে প্রক্ষেপ কোণ ৮

$$\sin^{-1}\left(\frac{\mu}{VR\left(V^2-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}\right)$$

২০। যদি V_1 এবং V_2 একটি গ্রহের রৈখিক বেগ হয় যখন গ্রহটির সূর্য থেকে দূরত্ব সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ, তবে প্রমাণ করো যে, $(1-e)V_1 = (1+e)V_2$, যেখানে e হল গ্রহটির কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা। ৮

বিভাগ - খ

(Probability and Statistics)

মান : ৫০

২১নং প্রশ্ন এবং *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও।

২১। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৫

(ক) যদি A, B, C তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং সম্পূর্ণ ঘটনা হয়, সম্ভাবনা সংক্রান্ত নিম্নলিখিত বক্তব্য সত্য কিনা বলো ঃ

$$P(A)=\frac{2}{3}, P(B)=\frac{1}{4}, P(C)=\frac{1}{6}$$

(খ) প্রদত্ত $P(A)=\frac{3}{8}, P(B)=\frac{5}{8}, P(A+B)=\frac{3}{4}$। $P(A \mid B)$ এবং $P(B \mid A)$ নির্ণয় করো।

(গ) একটি দ্বিপদ নিবেশন (n, p)-এর গড় এবং ভেদমান যথাক্রমে 20 এবং 16 । n এবং p-এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) ধরা যাক $f(x)=ke^{-x}(0\le x<\infty)$ একটি অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলরাশি x-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। তাহলে k ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করো।

(ঙ) বেইজের উপপাদ্য (Bayes' Theorem) বিবৃত করো।

(চ) দুইটি পরস্পর অনপেক্ষ চলকের ক্ষেত্রে দেখাও যে সহগাঙ্ক শূন্য হয়।

(ছ) নিম্নলিখিত তথ্যমালার সংখ্যাগরিষ্ঠ মান নির্ণয় করো।

3, 9, 2, 8, 7, 1, 1, 4, 5, 6, 6, 2, 9, 7, 8, 4, 6

(জ) কোন সূচক সংখ্যা কাল এবং গুণনীয়ক বিপরীতকরণ অভীক্ষা উভয়কে সিদ্ধ করে?

(ঝ) মরশুমী বিভিন্নতার বিভিন্ন মাপ কী?

২২। (ক) যদি $A \cap B \cap C = \phi$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$। ৪

(খ) দুটি থলিতে যথাক্রমে 3টি সাদা, 7টি লাল, 15টি কালো বল এবং 10টি সাদা, 6টি লাল, 9টি কালো বল আছে। একটি করে বল দুটি থলি থেকে তোলা হল। বল দুটি একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো। ৪

২৩। (ক) একটি যদৃচ্ছ চলরাশি X-এর নিবেশন অপেক্ষক-এর সংজ্ঞা দাও। ২

(খ) একটি অবিচ্ছিন্ন যদৃচ্ছ চলরাশি X যার সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad x > 0$$
$$= 0, \quad x \leq 0$$

নিবেশনের (i) গড় মান ও (ii) সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করো। ৩+৩

২৪. (ক) দেওয়া আছে $x = 4y + 5$ এবং $y = kx + 4$ হচ্ছে যথাক্রমে y-এর উপর x-এর এবং x-এর উপর y-এর নির্ভরণ রেখা। দেখাও যে $0 < k \leq 0{\cdot}25$। ৪

(খ) যদি X এবং Y-এর যৌথ সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x, y) = \frac{1}{4}$ যখন $x = -3, y = -5; x = -1, y = -1; x = 1, y = 1$ এবং $x = 3, y = 5$ হয়, তাহলে Cov (X, Y) নির্ণয় করো। ৪

২৫। (ক) নিম্নলিখিত তথ্য থেকে একটি পাই ডায়াগ্রাম আঁকো ঃ ৪

কেন্দ্রীয় সরকারের রাজস্ব ঃ

মাথা	*পরিমাণ কোটি টাকায়*
কাস্টমস	160
আবগারি	500
আয়কর	320
বাণিজ্যিক কর	100
অন্যান্য উৎস	120
মোট	**1200**

(খ) নিম্নলিখিত তথ্য থেকে বর্গ অন্তর 60-79, 80-99, 100-119, ইত্যাদি সঙ্গে একটি ফ্রিকোয়েন্সি বণ্টন টেবিল প্রস্তুত করো (ট্যালির চিহ্ন প্রদর্শন করা আবশ্যক) ঃ

96, 130, 63, 115, 145, 99, 118, 104, 126, 72,
77, 87, 151, 81, 142, 122, 110, 131, 98, 96,

এই বণ্টনের একটি আয়তলেখ অঙ্কন করো। ৪

২৬। (ক) 1000 পরিবারের খরচ নীচে দেওয়া হল ঃ

খরচ ('০০০ টাকা) :	40-59	60-79	80-99	100-119	120-139
ফ্রিকোয়েন্সি :	50	?	500	?	50

এই বিতরণের মধ্যমা এবং গড় উভয় Rs. 87·50 হয়। অনুপস্থিত ফ্রিকোয়েন্সি নির্ণয় করো। ৪

(খ) নিম্নলিখিত ফ্রিকোয়েন্সি বণ্টন থেকে সমক পার্থক্য নির্ণয় করো ঃ ৪

Wt. (lbs)	:	120-124	125-129	130-134	135-139	140-144	145-149
No. of boys	:	12	25	28	15	12	8

২৭। (ক) নিম্নলিখিত তথ্য থেকে একটি সরলরেখাকে সন্নিবেশ করো (লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতির সাহায্যে) ঃ ৪

সাল	:	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
উৎপাদন ('000 টন)	:	76	87	95	81	91	96	90

(খ) জীবনযাত্রার ব্যয়-নির্বাহী সূচক সংখ্যা বলতে কী বোঝায়? এটি নির্ণয় করার পদ্ধতিগুলি উল্লেখ করো ও এর ব্যবহার সম্বন্ধে যা জানো লেখো। ২+২

২৮। (ক) নীচে কলেজে পাঠরত ছাত্রসংখ্যা দেখানো হয়েছে; ছাত্রসংখ্যার ৫-বর্ষীয় গতিশীল গড়সমূহ নির্ণয় করো ঃ ৪

সাল	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
ছাত্র সংখ্যা	1332	1317	1357	1392	1402	1405	1410	1427	1405	1431

(খ) কালীন সারি বিশ্লেষণে প্রবণতার পরিমাপ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গতিশীল গড় পদ্ধতির সুবিধা ও সীমবদ্ধতা আলোচন করো।

২৯। (ক) প্রকল্প পরীক্ষার জন্য প্রথম প্রকার ভ্রান্তি ও দ্বিতীয় প্রকার ভ্রান্তির সংজ্ঞা দাও। ২

(খ) একটি বড়ো অংশের নির্বাচকমণ্ডলীর মধ্যে 300 জনের একটি সম্ভাব্য নমুনায় দেখা গেল 171 জন একটি নির্দিষ্ট নির্বাচন প্রার্থীকে ভোট দিচ্ছে। যে সমস্ত নির্বাচক ওই প্রার্থীকে ভোট দিচ্ছে সেই সমগ্রকের 95% আস্থা অন্তর নির্ণয় করো। (দেওয়া আছে $P(Z > 1{\cdot}96) = 0{\cdot}025$, যেখানে Z সম্ভাব্য চলরাশিটির নিবেশন সমক নর্মাল)। ৬

৩০। (ক) দশটি লোকের নিম্নে প্রদত্ত দৈনিক বেতনের প্রসার নির্ণয় করো ঃ ২

(টাকা) 220, 228, 222, 217, 221, 227, 224, 218, 216, 225

(খ) x এবং y চলকদ্বয়ের মধ্যে Karl Pearson-এর সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক $0{\cdot}52$ এবং তাদের সহভেদ মান $7{\cdot}8$; যদি x-এর ভেদমান 16 হয়, তবে y-এর সমক পার্থক্য নির্ণয় করো। ৩

(গ) যদি X এবং Y স্বাধীন হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ ৩

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Module - V

Marks : 50

Group – A

Marks : 20

Answers ***question no.*** **1** and ***any two*** from the rest.

1. Answer ***any two*** questions : 2×2

(a) Write down approximate representation of $\frac{2}{3}$ correct upto four significant digits and find the percentage error.

(b) The values of a function $f(x)$ for certain values of x are given in the following table :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	5	22	57

Construct the difference table.

(c) Tanking step length $h = 1$, prove that $\frac{\Delta^2 x^3}{Ex} = 6$

(d) Find the relative error in computing $x - y$ for $x = 12{\cdot}05$ and $y = 9{\cdot}02$ having absolute errors $\delta x = 0{\cdot}005$ and $\delta y = 0{\cdot}001$.

2. (a) Using appropriate interpolation formula, find the value of $f(0{\cdot}16)$ from the following table :

x	0·1	0·2	0·3	0·4
$f(x)$	1·005	1·020	1·045	1·081

5

(b) Show that $\Delta^3 = E^3 - 3E^2 + 3E - I, \Delta, E, I$ have their usual meaning. 3

3. (a) Find approximate value of $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x}$ upto four decimal places by Simpson's $\frac{1}{3}$ rule taking 6 equal sub-intervals of [0, 1]. 6

(b) Write Trapezoidal rule to compute $\int_a^b f(x)dx$ for 5 ordinates. 2

4. (a) State Lagrange's interpolation formula. 3

   (b) Find the polynomial $f(x)$ which assumes the values given below : 5

x	–2	1	2	4
$f(x)$	24	–9	–16	–24

5. (a) Find a positive real root of the equation $x^3 - x - 1 = 0$ correct upto four decimal places by the method of bisection. 6

   (b) State the interative formula of Newton-Raphson method for computing a simple real root of the equation $f(x) = 0$. 2

Group – B

Marks : 30

Answers ***question no.* 6** and ***any two*** questions from the rest.

6. Answer ***any three*** questions : 2×3

   (a) Draw the feasible region of the following inequalities :

$$2x + 3y \leq 6$$
$$x - y \leq 1, \quad x, y \geq 0$$

   (b) Determine K so that the vectors (1, 3, 1), (2, K, 0) and (0, 4, 1) are linearly dependent in E^3.

   (c) A hyperplane is given by the equation $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 7$. Find in which half spaces defined by the hyperplane the points (1, 2, 3, 4) and (1, 2, 2, –4) lie.

   (d) Show that $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 0$ is a basic solution of the system :

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11,$$
$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 14.$$

   (e) Find an IBFS by North-West corner method :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	4	6	9	5	16
O_2	2	6	4	1	12
O_3	5	7	2	9	15
b_j	12	14	9	8	

7. (a) A factory produces two product A and B with the help of machines M_1, M_2, M_3. The production time of one unit of A on the three machines are 2, 1, and 1 hour respectively and for one unit of B are 3, 1 and 3 hours respectively. Machine M_1, M_2 and M_3 can run 300, 300 and 240 hours respectively in a month. The profit of the products A and B are Rs. 2 and Rs. 3 per unit respectively. Formulate the given problem as an L.P.P. to maximize the profit. 7

   (b) Define a convex set. Show that the set of all feasible solutions of an L.P.P is a convex set. 1+4

8. (a) Solve the following L.P.P Graphically : 6

Maximize $Z = 5x_1 + 7x_2$

Subject to $3x_1 + 8x_2 \leq 12$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

(b) Solve the following transportation problem : 6

	D_1	D_2	D_3	$a_i \downarrow$
O_1	0	2	1	5
O_2	2	1	5	10
O_3	2	4	3	5
$b_j \rightarrow$	5	5	10	

9. (a) Find all basic feasible solutions of the following set of equations : 7

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 8$$
$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(b) Verify the statement "Dual of a dual is the primal" for the following L.P.P : 5

Maximize $Z = 3x_1 - 2x_2$

Subject to $2x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

10. (a) Solve the following L.P.P by simplex method : 6

Maximize $Z = 5x_1 + 3x_2$

Subject to $3x_1 + 5x_2 \leq 15$

$5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

(b) Find the optimal assignment to find the minimum cost for the following cost matrix : 6

	1	2	3	4
A	10	12	19	11
B	5	10	7	8
C	12	14	13	11
D	8	15	11	9

Module - VI

Group – A

(Analytical Dynamics)

Marks : 50

Answers ***question no.*** **11** and ***any five*** questions from the rest.

11. Answer ***any five*** questions : 2×5

(a) State the principle of conservation of linear momentum.

(b) The acceleration of a particle starting from rest and moving along a line is given by the relation $f = 15 - 0{\cdot}4\, t^2$. Determine the velocity and distance described offer time t.

(c) A particle describes the curve $r = ae^{\theta}$ in such a manner that its acceleration has no radial component. Prove that its angular velocity is constant.

(d) Explain the meaning of 'impulse of force' and 'impulsive force'.

(e) If time t be regarded as a function of velocity v, prove that the rate of decrease of acceleration f is $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$

(f) A particle describes a curve $r = ae^{\theta}$ with constant angular velocity. Show that the radial acceleration is zero.

(g) A particle describes a parabola $p^2 = ar$ under a force which is always directed towards its focus. Find the law of force.

(h) The velocities of a particle along and perpendicular to the radius vector from a fixed origin are λr and $\mu\theta$ respectively. Find the equation of path.

(i) If the angular velocity of a moving point about a fixed origin be constant, show that the transverse acceleration varies as the radial velocity.

12. A particle describes a plane curve under the action of a central attractive force F per unit mass. Prove that in usual notations the differential equation to the path of the particle is $\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = F$. 8

13. Find the expressions for tangential and normal components of velocity and acceleration of a particle moving in a plane. 8

14. A particle of mass m moves in a straight line under an attractive force mn^2x towards a fixed point on the line when at a distance x from it. If it be projected with a velocity V towards the centre of force from an initial distance a from it, then prove that it reaches the centre of force after a time $\frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{na}{V}\right)$ 8

15. A particle describes the path $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ under a force which is always directed to the pole. Find the law of force. 8

16. A Cannon ball of mass m is projected from a Cannon of mass M by an explosion which generates kinetic energy E. Prove that the initial velocity of the Cannon ball is $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$. 8

17. A particle describes the catenary $y = c\cosh\frac{x}{c}$ under a force which is always parallel to the positive direction of *y-axis*. Find the law of force. 8

18. Prove that the kinetic energy of two particles of mass m_1 and m_2 moving in a plane is

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2+\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2$$

where u is the velocity of the centre of mass of the particles and v is the velocity of the either of them relative to the other. 8

19. A particle moves with a central acceleration $\mu \times$ (distance $)^{-2}$. It is projected with velocity V at a distance R. Show that if the path is a rectangular hyperbola, then the angle of projection is

$$\sin^{-1}\left(\frac{\mu}{VR\left(V^2-\frac{2\mu}{R}\right)^{1/2}}\right)$$ 8

20. If V_1, V_2 are the linear velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the Sun, prove that $(1-e)V_1 = (1+e)V_2$, where e is the eccentricity of the orbit of the planet. 8

Group – B

(Probability and Statistics)

Marks : 50

Answers ***question no.*** **21** and ***any five*** questions from the rest.

21. Answer ***any five*** questions : 2×5

(a) If A, B, C are three mutually exclusive and exhaustive events, state whether the following statement regarding their probabilities are true :

$$P(A)=\frac{2}{3}, P(B)=\frac{1}{4}, P(C)=\frac{1}{6}$$

(b) Given that $P(A)=\frac{3}{8}, P(B)=\frac{5}{8}, P(A+B)=\frac{3}{4}$, Find $P(A \mid B)$ and $P(B \mid A)$.

(c) The mean and variance of a Binomial (n, p) distribution are 20 and 16 respectively. Find the values of n and p.

(d) Let $f(x)=ke^{-x}(0\le x<\infty)$ be the probability density function of a continuous random variable x. Find the constant k.

(e) State Bayes' theorem.

(f) Show that for two independent variates, correlation coefficient is zero.

(g) Find the mode of the following data :

3, 9, 2, 8, 7, 1, 1, 4, 5, 6, 6, 2, 9, 7, 8, 4, 6

(h) Which index number satisfies both time and factor reversal test?

(i) What are the different measures of seasonal variation?

22. (a) If $A\cap B\cap C=\phi$, then show that $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$. 4

(b) Two urns contain respectively 3 white, 7 red, 15 black balls and 10 white, 6 red, 9 black balls. One ball is drawn from each urn. Find the probability that both the balls are of same colour. 4

23. (a) Define distribution function of a random variable X. 2

(b) A continuous random variable X has the probability density function given by

$$f(x) = 2e^{-2x},\ x > 0$$
$$= 0,\ x \le 0$$

Find the (i) mean and (ii) standard deviation of the distribution. 3+3

24. (a) Given that $x = 4y + 5$ and $y = kx - 4$ are the regression lines of x on y and of y on x, respectively. Show that $0 < k \le 0{\cdot}25$. 4

(b) If X and Y have the joint probability density function

$$f(x,y)=\frac{1}{4} \text{ for } x=-3, y=-5; x=-1, y=-1;\ x=1, y=1 \text{ and } x=3, y=5$$

find Cov (X, Y). 4

25. (a) Draw a Pie-diagram from the following data : 4

Revenue of the Central Government :

Heads	*Amount in Rs. cores*
Customs	160
Excise	500
Income Tax	320
Corporation Tax	100
Other Sources	120
Total	**1200**

(b) Prepare a frequency distribution table with class intervals 60-79, 80-99, 100-119 etc. from the following data (Tally marks must be shown) : 4

96, 130, 63, 115, 145, 99, 118, 104, 126, 72,

77, 87, 151, 81, 142, 122, 110, 131, 98, 96

Also draw the histogram for this distribution.

26. (a) The expenditure of 1000 families is given below : 4

Expenditure (Rs.'000)	:	40-59	60-79	80-99	100-119	120-139
Frequency	:	50	?	500	?	50

The median and mean for the distribution are both Rs. 87·50. Calculate the missing frequencies.

(b) Find the standard deviation from the following frequency distribution : 4

Wt. (lbs)	:	120-124	125-129	130-134	135-139	140-144	145-149
No. of boys	:	12	25	28	15	12	8

27. (a) Fit a straight line from the following data (by the method of least square) : 4

Year	:	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Production ('000 tons)	:	76	87	95	81	91	96	90

(b) What is meant by Cost of Living Index Number? Name the methods used to construct it and mention its uses. 2+2

28. (a) Calculate 5-yearly moving average of the number of students studying in college shown below : 4

Year	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
No. of Students	1332	1317	1357	1392	1402	1405	1410	1427	1405	1431

(b) Discuss the merits and limitations of the moving average method for determining the trend on the analysis of time series. 4

29. (a) Type I and Type II errors related to hypothesis testing. 2

(b) 171 out of 300 voters picked at random from a large electorate said that they were going to vote a particular candidate. Find 95% confidence interval for the proportion of voters of the electorate who would vote in favour of the candidate (Given that P (Z > 1·96) = 0·025, where Z is a random variable having standard normal distribution). 6

30. (a) Calculate the range of the daily wages of the 10 persons : 2

Rs. 220, 228, 222, 217, 221, 227, 224, 218, 216, 225

(b) Karl Pearson's co-efficient of correlation between two variables x and y is 0·52. Their covariance is 7·8. If the variance of x be 16, find the standard deviation of y. 3

(c) If X and Y be independent random variables, prove that Var $(X + Y)$ = Var (X) + Var (Y) 3